# CZEGO NIE ROBIĆ NA MATURZE Z MATEMATYKI

TOP 10 BŁĘDÓW, KTÓRE MOŻESZ POPEŁNIĆ
A WOLAŁBYŚ NIE

JKJK

# Co to w ogóle ma być?

Jako tegoroczny* maturzysta mam na przygotowania do tego ważnego egzaminu wyjątkowo wydłużony czas. Jest go tyle, że postanowiłem nie tylko szlifować swoje umiejętności, ale i podzielić się nimi z nadzieją, że komuś się przydadzą.

W trakcie mojej nauki w liceum nasunęła mi się do głowy masa spostrzeżeń. Ta prezentacja to zbiór błędów, które moim zdaniem nietrudno popełnić na maturze i w głupi sposób stracić punkty. Lepiej byłoby tego uniknąć!

Być może niektóre z nich ktoś może uznać za nie do pomyślenia – wierzę jednak, że znajdzie się ktoś, komu w ten sposób pomogę. Zacznijmy więc!

Na slajdach gdzie zostało mi jakoś wyjątkowo dużo miejsca będą się pojawiać takie kotki (ewentualnie pieski) żeby dodać pozytywnych wrażeń estetycznych

* - dla potomnych: prezentacja jest tworzona w roku 2020 w czasie pandemii koronawirusa

1

# ZAKOŃCZENIE NIERÓWNOŚCI KWADRATOWEJ NA UJEMNEJ DELCIE

Jestem w stanie zaryzykować stwierdzenie, że jest to w pewnym sensie klasyczek. Nierówności kwadratowe pojawiają się bardzo często na maturze i są proste, ale nieuwaga bądź niewiedza może nas kosztować punkty. Weźmy na przykład:

$$x^2 + 6x > 2x - 5$$
$$x^2 + 4x + 5 > 0$$

Oczywiście w tym wypadku, po przerzuceniu wszystkiego na jedną stronę, musimy przyrównać trójmian kwadratowy do zera i policzyć deltę.

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$$

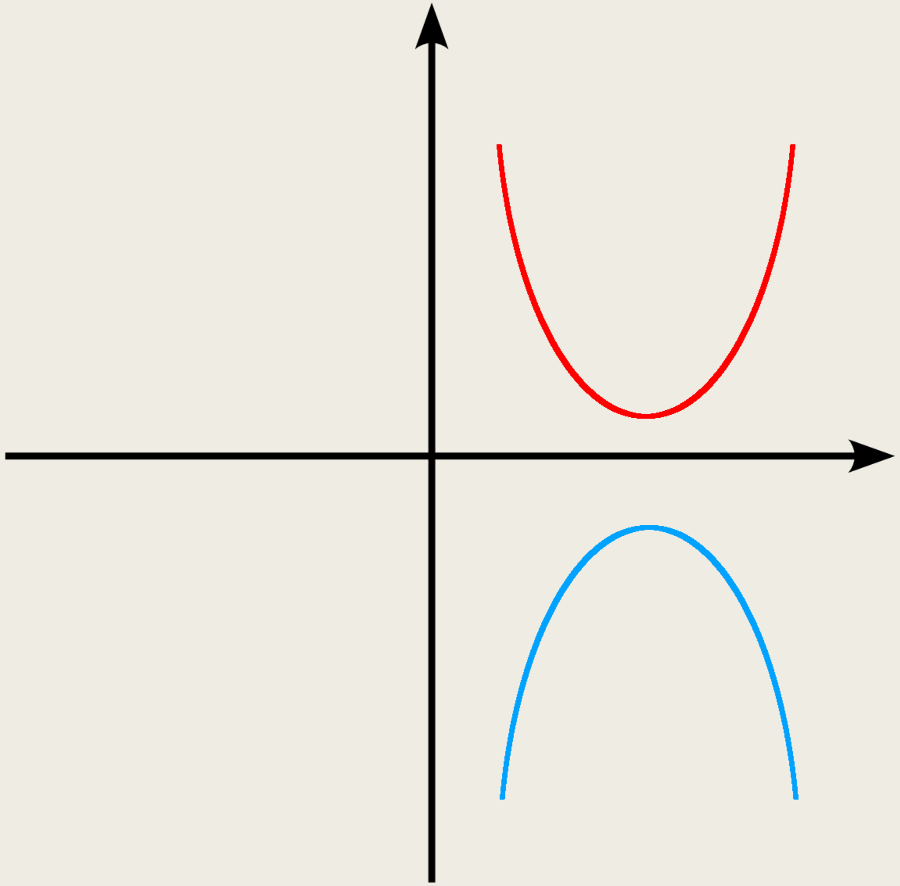
Delta wychodzi ujemna – równanie nie ma rozwiązań. Czy to oznacza, że nierówności nie spełnia żadna liczba i mamy koniec zadania?

Oczywiście nie!

Zwróćmy uwagę na ten krok:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Kiedy przyrównujemy trójmian kwadratowy do zera, jest to równoznaczne ze znajdowaniem miejsc zerowych funkcji kwadratowej o takim właśnie wzorze – są nimi rozwiązania powyższego równania, w tym wypadku $x$. Funkcja kwadratowa ma kształt paraboli, zatem jeśli nie posiada ona miejsc kwadratowych, jej wykres może wyglądać na dwa sposoby:



Jeżeli jej współczynnik kierunkowy - $a$ – spełnia warunek

$$a > 0$$

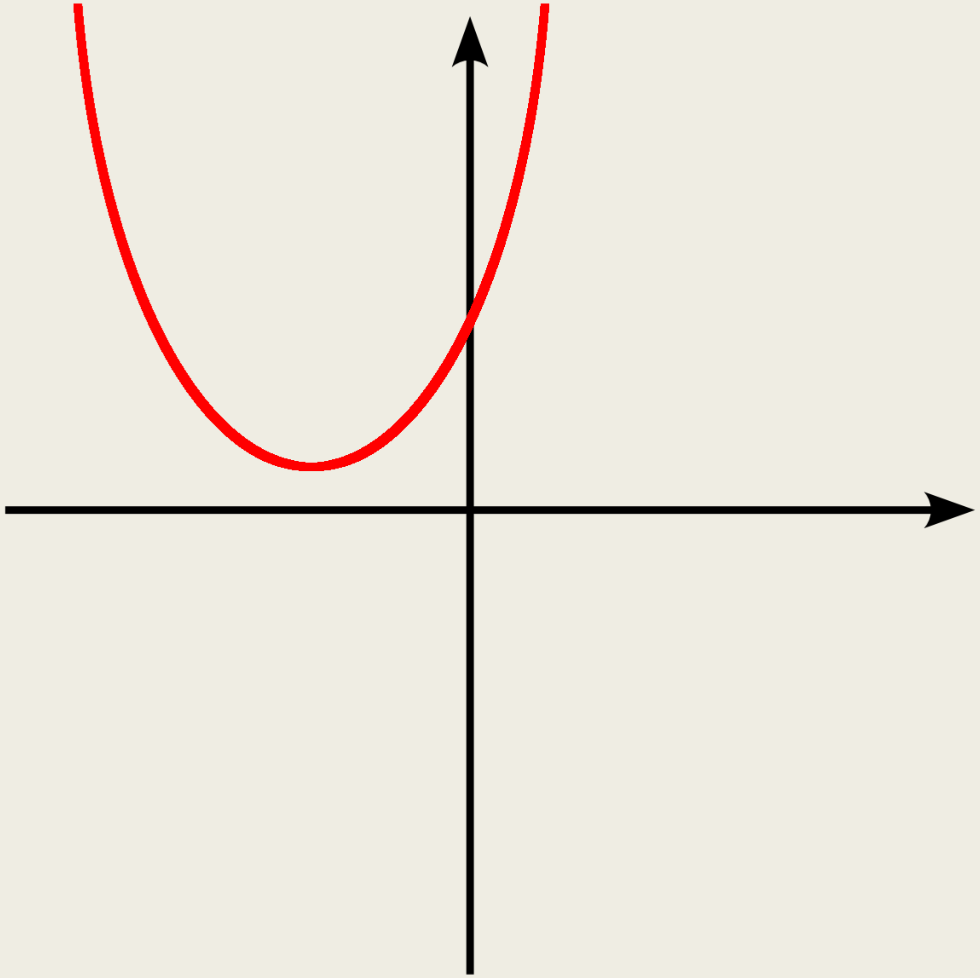
ramiona są skierowane w górę i funkcja przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.

Jeżeli zaś

$$a < 0$$

ramiona paraboli idą w dół i przyjmuje ona wyłącznie wartości ujemne.

Wróćmy do przykładu.
Wiemy już, że nasza parabola nie ma miejsc zerowych. $\boldsymbol{a = 1}$, zatem jej ramiona idą do góry.
Teraz musimy narysować parabolę (na oko) – w tym wypadku będzie ona miała mniej więcej taki wykres.
Osi $Oy$ **nie rysujemy**, nie ma takiej potrzeby – tutaj jest demonstracyjnie.



Jak możemy zaobserwować, funkcja osiąga wartość dodatnią dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem, rozwiązaniem nierówności

$$x^2 + 4x + 5 > 0$$

**Jest $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.**

# Uwaga!

Oczywiście może się zdarzyć, że delta wyjdzie nieujemna i nierówność nie ma rozwiązań. Tak działoby się na przykład w takim wypadku:

$$x^2 + 4x + 5 < 0$$

Nierówność różni się tylko znakiem nierówności – rozpatrujemy ten sam trójmian kwadratowy, który ma **tą samą ujemną deltę** i ten sam wykres, jak przed chwilą, ale teraz szukamy, dla jakich argumentów ma on wartość ujemną.

Skoro już ustaliliśmy, że to wyrażenie jest zawsze dodatnie, widzimy, że nierówność, dla jakiej przyjmuje on wartości ujemne, nie ma rozwiązań – tak samo jak miejsc zerowych. Musimy jednak do tego dojść i narysować parabolę - inaczej będzie to potraktowane jako zgadnięcie wyniku – no chyba że takie będzie zadanie zamknięte. Wtedy mamy szczęście…

2

# ROZWIĄZANIA NIEZGODNE Z DZIEDZINĄ

Na maturze przyjdzie nam rozwiązać niejedno równanie czy nierówność. Niektóre z nich będą od nas wymagały policzenia dziedziny – i powinniśmy od tego zacząć. Często będziemy musieli wykluczyć niektóre rozwiązania zadania, dlatego że do tej dziedziny nie należą.
Najbardziej powszechnym typem zadań, gdzie będziemy zaczynać od dziedziny, są te o wyrażeniach wymiernych. Przykładowo – mamy obliczyć rozwiązania tego równania:

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = 0$$

Zaczynamy od dziedziny. Nie dzielimy przez zero, stąd:

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$x \neq -2 \quad \land \quad x \neq 2$$

$$\Rightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Aby równanie

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = 0$$

Było spełnione, licznik $x^2 + 2x$ musi być równy $0$.

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Otrzymujemy zatem dwa rozwiązania. Pamiętając, że dziedzina wynosi

$$x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Musimy odrzucić $x = -2$. Zatem równanie ma jedno rozwiązanie: $\boldsymbol{x = 0}$

Zapomnienie o dziedzinie byłoby poważnym problemem, więc nie możemy do tego dopuścić!

Dobrą praktyką po rozwiązaniu równania/nierówności jest podstawienie (chociażby w głowie) naszych rozwiązań do pierwotnej postaci wyrażenia – nie tylko w kontekście zgodności z dziedziną. Wtedy możemy łatwo sprawdzić, czy wszystkie pasują.

W przykładzie, który rozwiązaliśmy przed chwilą, podstawiając za $x$ liczbę $-2$ otrzymalibyśmy:

$$\frac{(-2)^2+2(-2)}{(-2)^2-4} = \frac{4-4}{4-4} = \frac{0}{0}$$

czyli liczbę nierzeczywistą, oczywiście nierówną $0$.

Wielce prawdopodobne, że na maturze przyjdzie nam tak bardzo uważać na dziedzinę tylko w zadaniach z wyrażeń wymiernych. Pokażę jednak jeszcze parę przykładów, w których również jest ona istotna.

# Logarytmy

Gdyby zdarzyło się tak, że w podstawie logarytmu ($a$) lub w liczbie logarytmowanej ($b$) pojawiły się niewiadome, musimy policzyć jego dziedzinę wedle poniższych założeń.

$$\log_a b$$

$$a > 0$$
$$a \neq 1$$

$$b > 0$$

# Prawdopodobieństwo

Pamiętamy, że wartość logiczna $0$ oznacza wyrażenie niemożliwe, wartość $1$ – pewne.

Prawdopodobieństwo $P$ dowolnego zdarzenia $A$ spełnia warunek:

$$P(A) \in \langle 0,1 \rangle$$

W zadaniach, gdzie będziemy obliczali prawdopodobieństwo, nie zaczynamy od dziedziny – jest nam już znajoma i się nie zmienia. Należy jednak sprawdzić, czy rozwiązanie mieści się w tym przedziale. Jeżeli nie, coś zrobiliśmy źle.

# Funkcje trygonometryczne

Funkcje sinus i cosinus są określone dla dowolnego kąta. Musimy jednak pamiętać, że przyjmują wartości z konkretnego przedziału.

$$\sin x, \cos x \in \langle -1, 1 \rangle \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

Inaczej ma się sprawa z tangensem. Może on przyjąć dowolną wartość, ale nie zachodzi dla kąta $90°$ ani żadnego innego, który różni się od $90$-ciu stopni o wielokrotność $180$-ciu stopni (np. $270°$). To znaczy:

$$\operatorname{tg} x \in \mathbb{R} \qquad \text{dla } x \neq 90° + (k * 180°)$$

gdzie $k \in \mathbb{C}$

W zadaniach z funkcjami trygonometrycznymi może zdarzyć się tak, że będzie podane, do jakiego przedziału należy kąt, którego funkcję musimy policzyć. Na przykład:

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Oblicz $\cos\alpha$.

z jedynki trygonometrycznej

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{24}{49} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{24}{49}$$

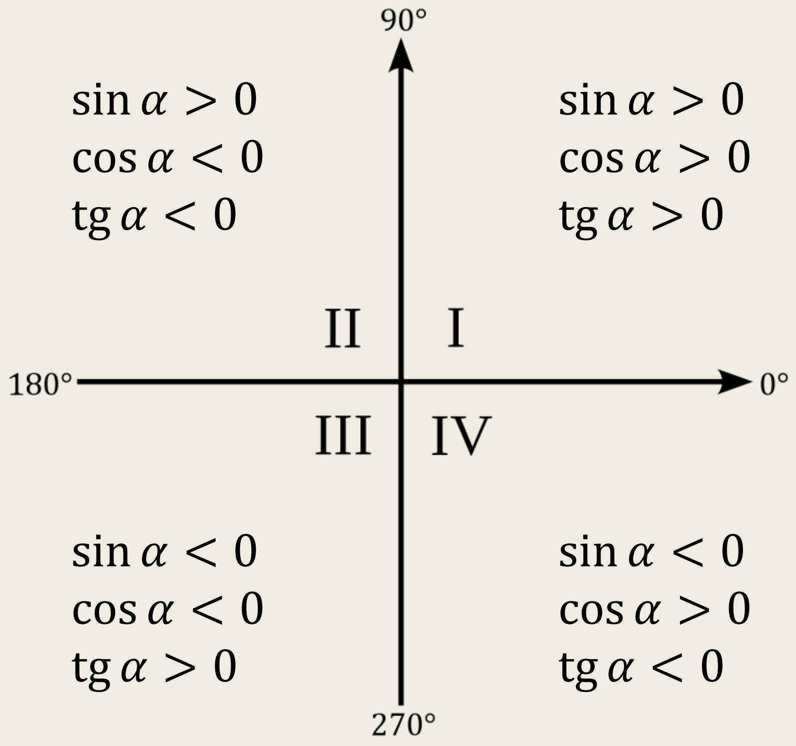
otrzymujemy równanie kwadratowe,
więc będą dwa rozwiązania

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{49}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{7} \quad \vee \quad \cos\alpha = -\frac{5}{7}$$

Skoro kąt $\alpha$ jest ostry, to należy do przedziału $(0°, 90°)$, który jest w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Cosinus tego kąta jest dodatni, zatem wybieramy właściwą odpowiedź, którą jest

$$\cos\alpha = \frac{5}{7}$$

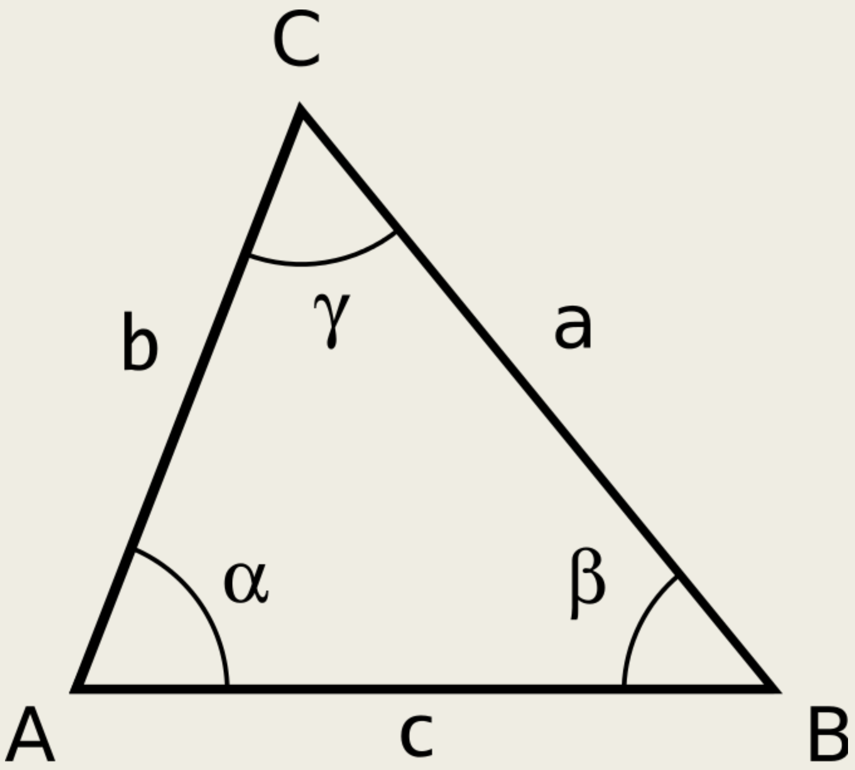



Funkcje trygonometryczne kątów w zależności od ćwiartki układu współrzędnych prezentują się następująco.

Łatwo zapamiętać, że sinus jest dodatni u góry, cosinus - dodatni po prawej, a tangens – tam, gdzie obie współrzędne są tego samego znaku ☺

# Trójkąty

Pamiętamy o kilku właściwościach trójkątów.




Kąty w dowolnym trójkącie spełniają równanie

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

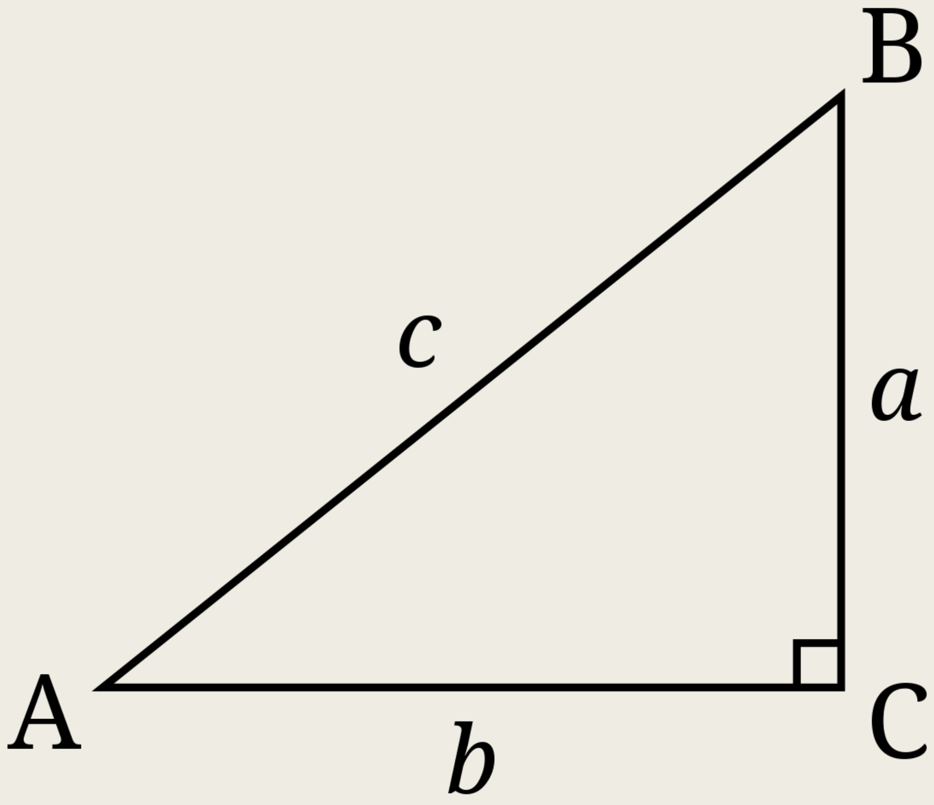
Więc każdy z nich musi należeć do przedziału

$$(0, 180°)$$

W trójkącie prostokątnym oczywiście pamiętamy o twierdzeniu Pitagorasa, ale to jest bardzo oczywiste. Obawiam się, że częściej pojawiają się błędy z innego powodu.

Chciałem przypomnieć, że w takim trójkącie przeciwprostokątna ($c$) zawsze jest najdłuższym bokiem.

$$c > a$$
$$c > b$$



# Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna potocznie mówiąc „określa odległość liczby od zera na osi liczbowej”, innymi słowy:

$$\begin{cases} |x| = x & \text{dla } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Stąd przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne. Warto o tym pamiętać.

$$\boldsymbol{|x| \geq 0} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

3

# KWADRAT NIE ZAWSZE JEST DODATNI

To dosłownie mały szczegół, ale warto o nim pamiętać. Każdy punkt jest cenny, a mogą zdarzyć się egzaminatorzy, którzy za to je zabiorą – byłoby tym bardziej szkoda, jeżeli cały dowód algebraiczny zrobimy dobrze, bo nie zawsze są to proste zadania.
Przykładowo: mamy udowodnić, że dla dowolnego dodatniego $x$ zachodzi ta nierówność:

$$4x + \frac{1}{x} \geq 4 \quad /* x$$

$$4x^2 + 1 \geq 4x$$

$$4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

$$(2x-1)^2 \geq 0$$

Tu musimy napisać, że możemy pomnożyć nierówność razy $x$, bo jest on liczbą dodatnią – więcej na ten temat w punkcie 7

Wszystkie obliczenia w tym momencie są zrobione – i właściwie możemy to już tak zostawić, ale można dopisać, że wyrażenie $(2x-1)^2$ jest zawsze nieujemne, jako że jest kwadratem. Najważniejsze to **nie napisać** że jest ono **dodatnie** – to błąd, ponieważ może być zerem, które nie jest ani dodatnie ani ujemne – i może nas on kosztować punkty. Są takie sytuacje, kiedy lepiej nic nie pisać, niż ryzykować!

4

# BRAK WSPÓŁCZYNNIKA KIERUNKOWEGO

Funkcja kwadratowa może być zapisana w trzech postaciach:

$$f(x) = \mathbf{a}x^2 + bx + c$$

ogólna

$$f(x) = \mathbf{a}(x - p)^2 + q$$

kanoniczna
gdzie $(p, q)$ to współrzędne wierzchołka paraboli

$$f(x) = \mathbf{a}(x - x_1)(x - x_2)$$

iloczynowa
gdzie $x1, x2$ są miejscami zerowymi funkcji

Jeżeli pojawi się zadanie, wymagające od nas zapisania postaci kanonicznej lub iloczynowej, upewnijmy się, czy pamiętaliśmy o współczynniku kierunkowym $\mathbf{a}$, stojącym na początku wzoru. Jest on we wszystkich postaciach tej samej funkcji niezmienny i po wymnożeniu zawsze będzie stał przy wyrazie z potęgą najwyższego stopnia.

Przykładowe zadanie:

Funkcja kwadratowa $f(x)$ ma miejsca zerowe 7 i $-4$. Oblicz $\frac{f(5)}{f(2)}$.

Aby je rozwiązać, musimy zamienić funkcję na postać iloczynową i zapisać w ułamku, gdzie w liczniku podstawiamy $5$, a w mianowniku $2$ za $x$.

$$\frac{a(5-7)(5+4)}{a(2-7)(2+4)} =$$

$$\frac{a(-2)*9}{a(-5)*6} = \frac{-18}{-30} = \frac{3}{5}$$

I w tym miejscu pamiętamy o współczynniku kierunkowym – ostatecznie on się i tak skróci, ale w przeciwnym razie możemy za to stracić punkty. No chyba że znowu jest to zadanie zamknięte i mamy szczęście!

# 5

# ROZDZIELANIE POTĘG I PIERWIASTKÓW SUMY I RÓŻNICY

Wątpię, by wiele osób tego nie wiedziało, ale ze stresu i pośpiechu może się nam zdarzyć o tym zapomnieć. Liczby potęgowane i pierwiastkowane możemy, oczywiście, rozdzielać na iloczyn bądź iloraz:

$$12^3 = 4^3 * 3^3 \qquad \sqrt{36} = \sqrt{9} * \sqrt{4} \qquad \sqrt{20x} = \sqrt{20} * \sqrt{x}$$

Byle się tylko nie rozpędzić i **nie zrobić** czegoś takiego z potęgą ani pierwiastkiem sumy lub różnicy!

$$\boldsymbol{(a+b)^2 \neq a^2 + b^2}$$

$$\boldsymbol{(a-b)^2 \neq a^2 - b^2}$$

To znamy z wzorów skróconego mnożenia, więc raczej większość z nas pamięta, by tak nie robić

$$\boldsymbol{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

Na temat pierwiastków być może mówiło się trochę mniej, więc jest to mniej oczywiste – zwracam zatem na nie szczególną uwagę. Nie możemy zapominać o tym, że pierwiastek sumy i różnicy, to nie to samo co suma i różnica pierwiastków!

Przykładowo weźmy takie zadanie. Matura z sierpnia 2015.

**Zadanie 4. (0–1)**

Liczba $\sqrt{\frac{9}{7}}+\sqrt{\frac{7}{9}}$ jest równa

**A.** $\sqrt{\frac{16}{63}}$ **B.** $\frac{16}{3\sqrt{7}}$ **C.** $1$ **D.** $\frac{3+\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$

Bardzo kusząco wyglądałoby takie wyjście:

$$\sqrt{\frac{9}{7}}+\sqrt{\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{9}{7}+\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{81}{63}+\frac{49}{63}}=\sqrt{\frac{130}{63}}$$

W żadnym wypadku!

W tym zadaniu musimy po prostu zamienić pierwiastki ilorazu na iloraz pierwiastków i wtedy szukać wspólnego mianownika:

$$\sqrt{\frac{9}{7}}+\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}=\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{3}=$$

$$\frac{9}{3\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}*\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}=\frac{9+7}{3\sqrt{7}}=\frac{16}{3\sqrt{7}}$$

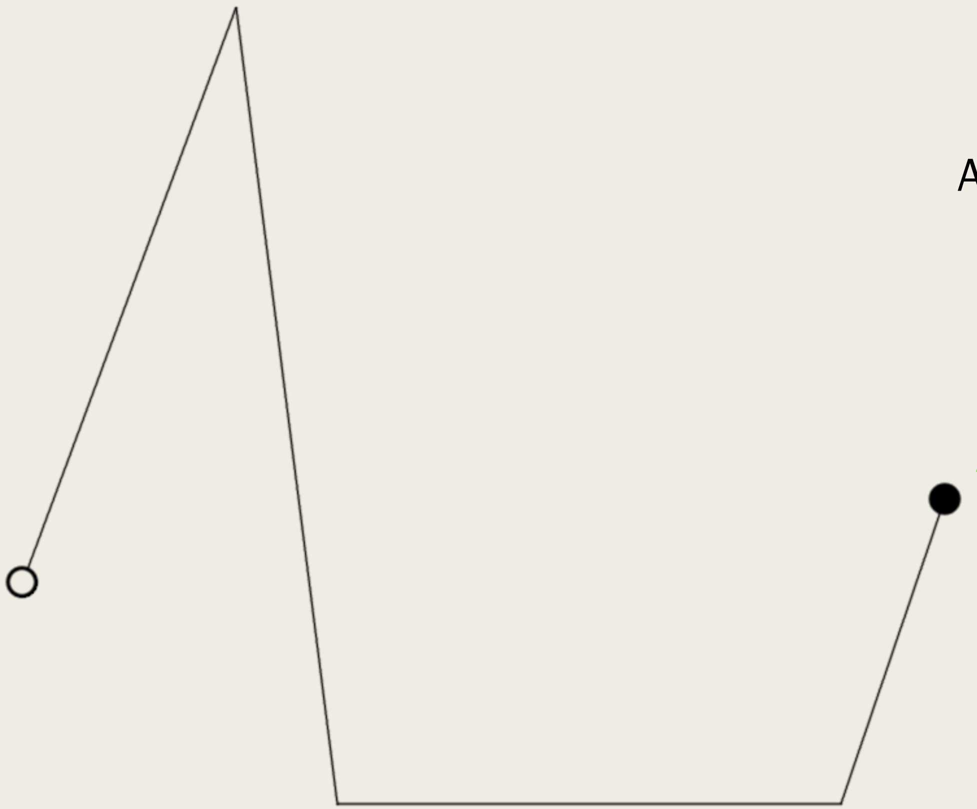
Czyli odpowiedź B

**B.** $\frac{16}{3\sqrt{7}}$

6

# NIEWŁAŚCIWE ODCZYTYWANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI Z WYKRESU

Raczej bez problemu kojarzymy, że jeżeli na wykresie funkcji jakiś punkt jest zaznaczony w ten sposób, to do niej nie należy

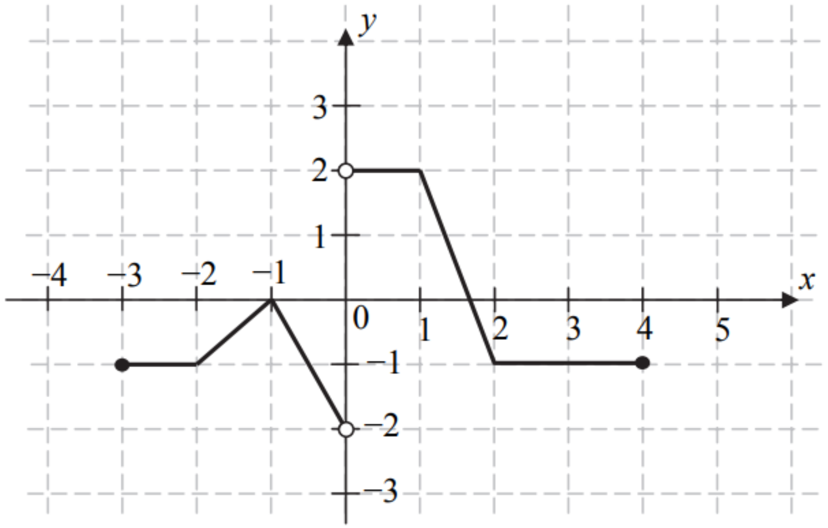


A jeśli w ten, to należy

Są takie wykresy, które mogą nas nieco zaskoczyć, kiedy musimy odczytać ich właściwości. Spieszę z przykładami.

Zobaczmy na zadanie z maja 2015.

**Zadanie 8. (0–1)**
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f$.




Zbiorem wartości funkcji $f$ jest

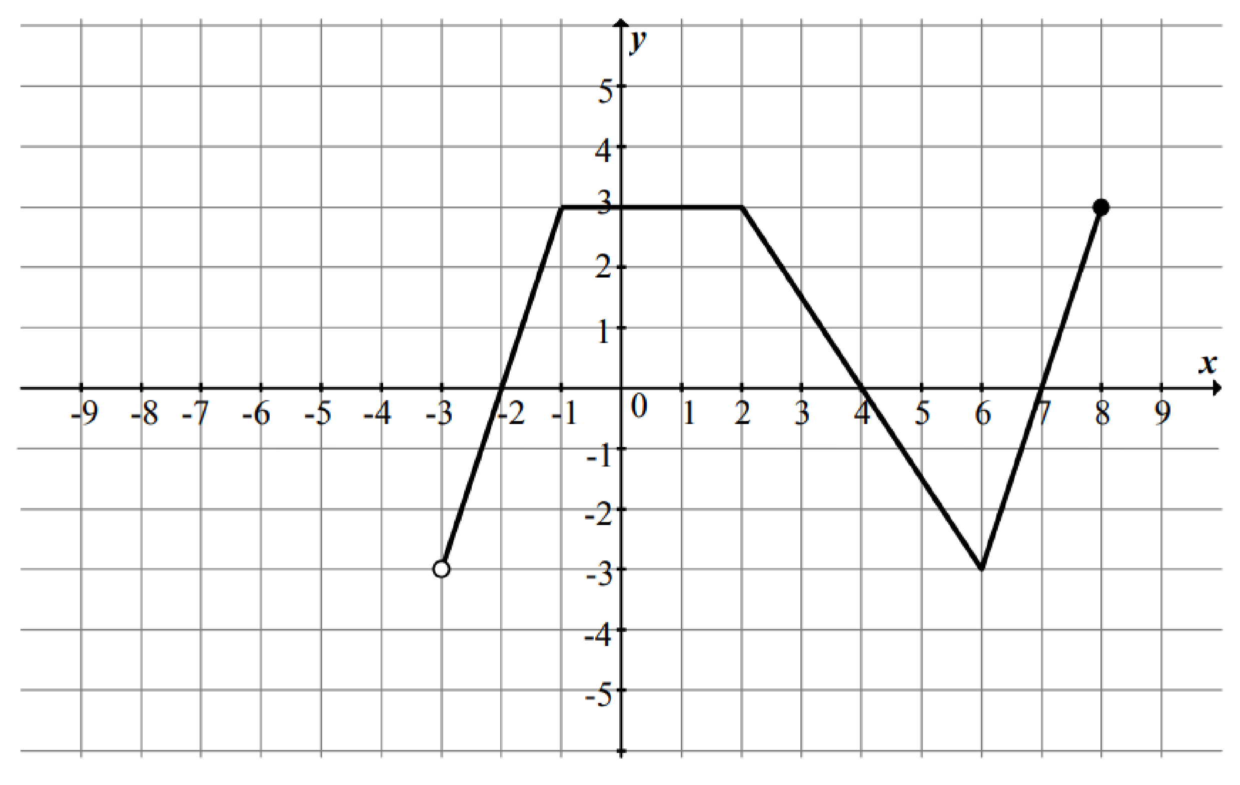
**A.** $(-2, 2)$ **B.** $\langle -2, 2)$ **C.** $\langle -2, 2\rangle$ **D.** $(-2, 2\rangle$

Mamy podać zbiór wartości, więc patrzymy można powiedzieć od dołu do góry. Dolną granicą zbioru wartości jest $-2$ w przedziale otwartym, to nie ulega wątpliwości, ale co z górną?

Niech nie zmyli nas puste kółeczko w punkcie $(0{,}2)$. Pamiętajmy, że funkcja może przyjmować daną wartość dla różnych argumentów i jeśli dla jednego argumentu ona nie zachodzi, może zajść dla drugiego. Wartość 2 **nie zachodzi dla argumentu $\mathbf{0}$**, ale dla argumentów z przedziału $(\mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ już **tak**!

Stąd $\boldsymbol{f(x)} \in (-\mathbf{2}, \mathbf{2}\rangle$ - **odpowiedź D** jest poprawna.

Zwrócę uwagę na jeszcze jedną rzecz – posłużę się wykresem z matury z sierpnia 2014.




Przyjmijmy polecenie:
W jakim przedziale funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości ujemne?

I odpowiedzią będzie suma przedziałów:

$$x \in (-3,-2) \cup (4,7)$$

Tutaj bardzo radzę uważać na nawiasy – na tym przykładzie argument $-3$ nie należy do dziedziny funkcji, więc nie przyjmuje ona dla niego wartości ujemnej.
Liczby $-2$, $4$ i $7$ są miejscami zerowymi, więc dla nich funkcja jest równa $0$ – a już wspominałem, że zero nie jest **ani dodatnie, ani ujemne**.

7

# BŁĘDNE MNOŻENIE NIERÓWNOŚCI PRZEZ WYRAŻENIA UJEMNE I ZMIENNĄ

Powiedziałbym, że w porównaniu do równań, nierówności są dosyć niewdzięczne. Na pewno trzeba się z nimi trochę więcej pomęczyć (jak już wiemy z punktu 1. naszej prezentacji). Utrudnieniem jest fakt, że musimy uważać, przez co mnożymy bądź dzielimy nierówność – jeśli będzie to liczba ujemna, musimy zmienić znak nierówności na przeciwny.

$$\frac{-2x-5}{3} > 7 \qquad | * 3$$

tu nic się nie zmienia w znakach bo mnożymy razy dodatnią liczbę 3

$$-2x - 5 > 21$$

$$-2x > 26 \qquad |: -2$$

tutaj, dzieląc przez ujemne $-2$ trzeba będzie „obrócić” znak nierówności w drugą stronę

$$x < -13$$

Gorąco zachęcam, aby w każdym zadaniu z nierównością jakie przyjdzie nam wykonać, przy **wszystkich działaniach mnożenia lub dzielenia** zachować szczególną uwagę i **dokładnie się upewnić**, czy wszystkie znaki się zgadzają.

Komplikacje pojawiają się też wtedy, kiedy mamy pomnożyć nierówność przez zmienną.
Na szczęście, wielce prawdopodobne jest, że w zadaniach wymagających takiej operacji, w treści będzie podane, że zmienna (bądź zmienne, ich suma, iloczyn itd.) są dodatnie.
Na przykład zadanie z sierpnia 2018:

**Zadanie 29. (0–2)**

Wykaż, że jeżeli $a$ i $b$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$$

skoro $a$ i $b$ są dodatnie, możemy (a wręcz powinniśmy) swobodnie pomnożyć to wyrażenie – w tym wypadku razy $ab$

$$(a+b)(b+a)\geq 4ab$$

powinniśmy jednak gdzieś z boku wspomnieć, że możemy wykonać takie działanie właśnie ze względu na to, że $ab$ jest liczbą dodatnią – inaczej egzaminator może się przyczepić!

$$a^2+2ab+b^2\geq 4ab \quad\Rightarrow\quad a^2-2ab+b^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad (a-b)^2\geq 0$$

co kończy dowód

Gdyby się tak zdarzyło (jest to baaardzo wątpliwe więc potraktujmy to jako ciekawostkę) że trzeba mnożyć razy zmienną niewiadomego znaku, musimy sobie poradzić z tym w następujący sposób.
Przykładowo by znaleźć rozwiązania takiej nierówności:

$$\frac{x-4}{x} \geq 3$$

dla $x \neq 0$

Pozbędziemy się mianownika i zachowamy znak nierówności mnożąc obustronnie razy $x^2$ - wyrażenie dodatnie (bo $x$ nie jest zerem – patrz punkt 3)

$$(x-4)x \geq 3x^2$$

$$x^2 - 4x \geq 3x^2$$

$$-2x^2 - 4x \geq 0$$

Już nie będę rozwiązywał jej krok po kroku, ale wynikiem jest przedział $\langle \mathbf{-2}, \mathbf{0})$.

8

# KIEDY DWA MINUSY NIE DAJĄ PLUSA

Dwa minusy dają plus – myślę, że to wiemy już od dawna i zazwyczaj zwracamy na to uwagę w zadaniach. Są jednak dwie sytuacje, w których często zdarza nam się z tego powodu pomylić.

**Pierwsza** – kiedy odejmujemy ułamek

$$\frac{2x+5}{11} - \frac{-8-x}{11} = \frac{2x+5+8+x}{11} = \frac{3x+13}{11}$$

Wynika to z tego, że:

$$-\frac{-8-x}{11} = -(-8-x)\left(\frac{1}{11}\right) = (8+x)\left(\frac{1}{11}\right) = \frac{8+x}{11}$$

**Druga** sytuacja – kiedy dzielimy przez potęgę ujemnego stopnia

$$\frac{3^5}{3^{-11}} = 3^{5-(-11)} = 3^{5+11} = 3^{16}$$

Ponownie – dzielenie potęg tej samej liczby jest odejmowaniem wykładników – co „daje pierwszy minus” a jako że potęga jest ujemna, mamy ten drugi – razem dają plus.

9

# WYBÓR ODPOWIEDNIEGO ILORAZU CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Ciąg może być monotoniczny. W niektórych zadaniach na podstawie informacji, że jest rosnący bądź malejący, musimy określić któryś z jego wyrazów bądź różnicę/iloraz.
W przypadku ciągu arytmetycznego nie ma tutaj większej filozofii – jeśli różnica ciągu jest większa od zera ($r > 0$), to ciąg jest rosnący. Jeśli $r < 0$, wtedy będzie malejący.
W ciągu geometrycznym sprawy mają się nieco inaczej.

no tutaj to mi wyjątkowo dużo miejsca zostało

Ciąg geometryczny jest rosnący dla:

Na przykład:

- $\boldsymbol{a_1 > 0}$ i $\boldsymbol{q > 1}$ $\quad a_1 = 4, \quad q = 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 8, \; a_3 = 16, \; a_4 = 32$
- $\boldsymbol{a_1 < 0}$ i $\boldsymbol{q \in (0, 1)}$ $\quad a_1 = -4, \quad q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = -2, \; a_3 = -1, \; a_5 = -\frac{1}{4}$

A malejący dla:

- $\boldsymbol{a_1 > 0}$ i $\boldsymbol{q \in (0, 1)}$ $\quad a_1 = 27, \quad q = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 9, \; a_3 = 3, \; a_5 = \frac{1}{3}$
- $\boldsymbol{a_1 < 0}$ i $\boldsymbol{q > 0}$ $\quad a_1 = -9, \quad q = 3 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -27, \; a_3 = -81, \; a_5 = -243$

Dlaczego to ważne? Przypuśćmy, że pojawiłoby się do rozwiązania takie zadanie:

Pierwszy wyraz malejącego ciągu geometrycznego $a_n$ jest równy $16$, a trzeci wyraz równy $4$. Jaki jest iloraz tego ciągu?

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$

Wtedy:

$$16 * q^2 = 4$$

$$q^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{1}{2} \qquad \vee \qquad q = -\frac{1}{2}$$

Wśród odpowiedzi A, B i C znajdują się oba rozwiązania powyższego równania. W treści pojawia się wiadomość, że ciąg jest malejący – no i pewnie kusiłoby nas, że skoro malejący, to odpowiedź $q = -\frac{1}{2}$.
Oczywiście **nie jest ona prawidłowa** –wtedy wyraz $a_2$ byłby równy $-8$, zatem ciąg rośnie od $a_2$ do $a_3$.
Ciąg będzie malejący dla $q = \frac{1}{2}$, więc prawidłowa jest odpowiedź **C**.

10

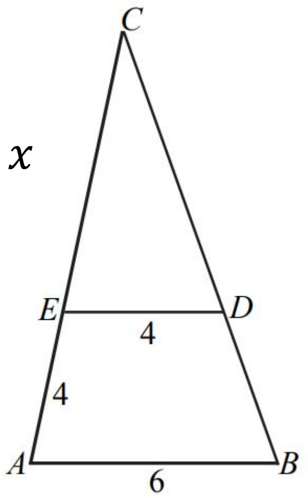
# NIEWŁAŚCIWA PROPORCJA W FIGURACH PODOBNYCH

Mówimy: „figury podobne”, myślimy: „skala podobieństwa”. Prawdą jest, że w niemal każdym zadaniu z tego działu będzie trzeba policzyć jakiś stosunek. Musimy jednak wystrzec się pewnej pomyłki.

Na przykładzie zadania z sierpnia 2017:

**Zadanie 15. (0–1)**

W trójkącie $ABC$ punkt $D$ leży na boku $BC$, a punkt $E$ leży na boku $AC$. Odcinek $DE$ jest równoległy do boku $AB$, a ponadto $|AE| = |DE| = 4$, $|AB| = 6$ (zobacz rysunek).




Odcinek $CE$ ma długość

**A.** $\frac{16}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** 8 **D.** 6

Trójkąty $ABC$ i $EDC$ są podobne, zatem pary ich odpowiadających boków mają równe stosunki.

$$\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Zatem stosunek małego trójkąta do dużego równy jest $\frac{2}{3}$.

Przyjmując oznaczenie $|CE| = x$:

$$\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

I tutaj należy pamiętać, że bierzemy pod uwagę **cały odcinek $CA$**, który jest równy $x + 4$ – bo mogłoby się zdarzyć, że idąc tokiem rozumowania z poprzedniego stosunku, po prostu podzielimy $x$ przez 4.

Rozwiązaniem jest odpowiedź **C: 8.**

No i to by było na tyle. Mam nadzieję, że chociaż w małym stopniu pomogłem i uratowałem Wam kilka punktów. Jeśli z kolei wszystko wiedzieliście i niczym was nie zaskoczyłem – to nawet lepiej!

Wszystkim życzę jak najpiękniej napisanej matury i dalszych sukcesów!